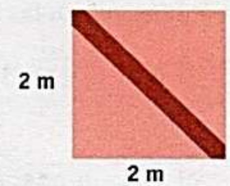
CUADERNILLO DE ACTIVIDADES

EDICIÓN 2026

Los números Reales

1)

Para hacer una bandera que represente al curso, los chicos de 1.º A tienen un cuadrado de tela de 2 m de lado y quieren pegarle una tira de otro color a lo largo de la diagonal, como se muestra en la figura. Cecilia dice que no les alcanzan los 2 m de cinta que tienen, y que hay que comprar $\frac{3}{4}$ m más para añadirla a la diagonal de la bandera. Martín dice que, al menos, necesitarán $\frac{7}{8}$ m más de cinta.

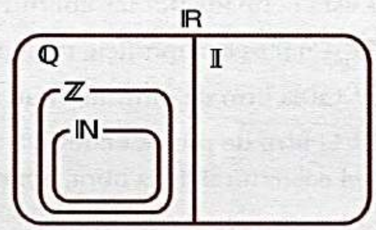


a) ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Por qué?

b) ¿Es posible expresar la medida de la diagonal del cuadrado de la figura como una fracción?

Para leer y recordar

- Los *números racionales* son los que pueden expresarse en forma de fracción. Los números naturales, los enteros, las expresiones decimales exactas y las periódicas pueden ser expresadas en forma de fracción, por lo tanto, todos ellos son números racionales.
- Los *números irracionales* son los que no son racionales, es decir, aquellos que no pueden expresarse en forma de fracción, ya que su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas.



La unión del conjunto ℚ de los números racionales con el conjunto 𝕀 de los números irracionales forma el conjunto ℝ de los números reales.

Por ejemplo, son números irracionales:

- Las raíces de los números naturales cuyos resultados no son naturales: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{6}$.
- Expresiones decimales generadas con cierto criterio, de modo tal que la cantidad de cifras decimales resulten infinitas: 0,123456...; −45,01001000100001... (los anotamos con tres puntos suspensivos para indicar que la secuencia sigue en las cifras decimales).
- Números "especiales": $\pi \cong 3{,}1415...$ $\quad e \cong 2{,}7182...$ $\quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2) ¿A qué conjuntos numéricos pertenecen los resultados de los siguientes cálculos? Coloquen cruces en los casilleros correspondientes

Cálculos	ℕ	ℤ	ℚ	𝕀	ℝ
$7 - 4 : 2$					
$7 - 4 . 2$					
$(7 + 2) : (-4)$					
$\sqrt{7 - 4 . 2}$					
$\sqrt{(7 + 2) : 4}$					
$\sqrt{(7 - 2) . 4}$					

3) Observen la siguiente lista de números y ordénenlos de menor a mayor

$\sqrt{6}$; 1,732; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\frac{4}{3}$; 1,3; 1,42; $\sqrt{5}$; $1,\overset{\frown}{41}$; 1,41; 1,333333; $\sqrt{10}$.

Radicales

Se denomina **radical** a la raíz indicada de un número con solución real. Son radicales $\sqrt{6}$ o $\sqrt[3]{4}$ y no lo son $\sqrt{-5}$ o $\sqrt[4]{-7}$.

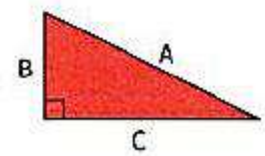
En raíces donde el valor numérico se expresa con una **variable**, esta solo puede tomar los valores en los que la raíz tiene solución real.

$\sqrt{m}$ es un radical si $m \geq 0$ $\qquad$ $\sqrt[4]{2-n}$ es radical si $n \leq 2$

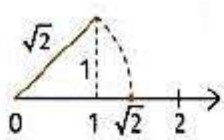
Representación en la recta real

La raíz **cuadrada** de un número puede ser representada en la recta real aplicando la propiedad **pitagórica**.

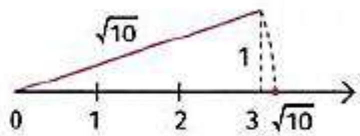
$$\boxed{A^2 = B^2 + C^2 \Rightarrow A = \sqrt{B^2 + C^2}}$$



$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$



$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$



Extracción de factores de un radical

Si hay factores dentro de un radical cuyo exponente es mayor o igual que el índice de la raíz, se pueden extraer aplicando propiedades.

$$\sqrt{216} = \sqrt{6^3} = \sqrt{6^2.6} = \sqrt{6^2}.\sqrt{6} = \mathbf{6\sqrt{6}}$$

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{3^3.3^2} = \sqrt[3]{3^3}.\sqrt[3]{3^2} = \mathbf{3\sqrt[3]{9}}$$

$$\sqrt[4]{a^9.b^7} = \sqrt[4]{a^8.a.b^4.b^3} = \sqrt[4]{a^8}.\sqrt[4]{b^4}.\sqrt[4]{a.b^3} = \mathbf{a^2.b.\sqrt[4]{a.b^3}}$$

4) Calcular y marcar con una X la igualdad correcta.

a. $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ☐	$\sqrt{8}=4\sqrt{2}$ ☐	**c.** $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ ☐	$\sqrt{18}=2\sqrt{3}$ ☐
b. $\sqrt{50}=2\sqrt{5}$ ☐	$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ ☐	**d.** $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ ☐	$\sqrt{48}=4\sqrt{2}$ ☐

5) Extraer todos los factores posibles de cada radical.

a. $\sqrt{300}=$

d. $\sqrt[3]{162}=$

b. $\sqrt{252}=$

e. $\sqrt[3]{375}=$

c. $\sqrt{392}=$

f. $\sqrt[4]{405}=$

Operaciones con números irracionales

Teoría

Algunos números irracionales se expresan exactamente mediante un **radical**, que es la raíz indicada de un número, siempre que esta tenga solución real.

Para operar con radicales, hay que aplicar distintas propiedades.

a) $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=\mathbf{7\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{7}\,.\,\sqrt{3}=\sqrt{7\,.\,3}=\mathbf{\sqrt{21}}$

c) $\sqrt{35}:\sqrt{5}=\sqrt{35:5}=\sqrt{7}$

d) $\sqrt{18}=\sqrt{3^2\,.\,2}=\sqrt{3^2}\,.\,\sqrt{2}=\mathbf{3\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{3}=\sqrt{2^2\,.\,3}+\sqrt{5^2\,.\,3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3}=\mathbf{6\sqrt{3}}$

6)

Colocar **V** (verdadero) o **F** (falso) según corresponda.

a) $\sqrt{7}+\sqrt{7}=\sqrt{14}$ ☐	c) $2\sqrt{5}+2\sqrt{5}=2\sqrt{10}$ ☐	e) $5\sqrt{3}-\sqrt{3}=5$ ☐
b) $-\sqrt{6}+\sqrt{6}=0$ ☐	d) $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2$ ☐	f) $\sqrt{11}+\sqrt{11}=2\sqrt{11}$ ☐

g) Resolver correctamente las que son falsas.

7)

Resolver aplicando propiedades.

a) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{2} =$

b) $\sqrt{7}\,.\,\sqrt{7} =$

c) $\sqrt{20}\,.\,\sqrt{5} =$

d) $\sqrt{75} : \sqrt{3} =$

e) $12\sqrt{2} : \sqrt{2} =$

f) $\sqrt{48} : \sqrt{8} =$

8)

Resolver las siguientes operaciones.

a) $5\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 6\sqrt{3} =$

b) $\sqrt{50} + \sqrt{32} =$

c) $7\sqrt{3} + \sqrt{48} =$

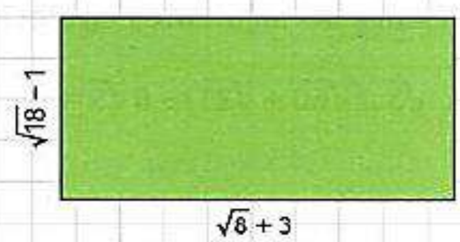
d) $\sqrt{2}\left(\sqrt{8} + \sqrt{18}\right) =$

e) $\left(\sqrt{45} - \sqrt{20}\right) : \sqrt{5} =$

f) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) . \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) =$

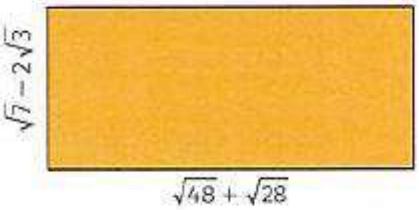
9)

Hallá el perímetro y la superficie del rectángulo verde.



10)

Calculá el perímetro y el área del rectángulo.



Racionalización de denominadores

Racionalizar una fracción con un radical irracional en su denominador, es encontrar una fracción equivalente con denominador racional.

- El denominador es una única raíz cuadrada.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- El denominador es una única raíz de cualquier índice.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3.3^3}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{8a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3a^2}}\frac{\sqrt[5]{2^2a^3}}{\sqrt[5]{2^2a^3}} = \frac{\sqrt[5]{4a^3}}{\sqrt[5]{2^3a^2.2^2a^3}} = \frac{\sqrt[5]{4a^3}}{\sqrt[5]{2^5a^5}} = \frac{\sqrt[5]{4a^3}}{2a}$$

- El denominador es una suma o resta de una o dos raíces cuadradas.

Para estas expresiones, se aplica la propiedad $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

$$\frac{1}{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{3+\sqrt{5}}\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{9-5} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{7-2} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{5}$$

11) Unan con flechas cada expresión con la racionalización correspondiente

a. $\frac{3}{\sqrt[6]{4^5}} =$

b. $\frac{3}{\sqrt{2^3}} =$

c. $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} =$

- $\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2}$
- $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{2}$
- $\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}$

12) Relacionen cada cálculo con su resultado

a. $\frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+2} =$

b. $\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}+2} =$

c. $\frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}-2} =$

d. $\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}-2} =$

- $15 - 7.\sqrt{5}$
- $-5 - 3.\sqrt{5}$
- $3.\sqrt{5} - 5$
- $15 + 7.\sqrt{5}$

13)

Racionalizá los siguientes denominadores.

a. $\frac{1}{\sqrt{3}+1} =$

c. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{6}} =$

b. $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} =$

d. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$

14)

Expresá cómo un único radical.

a. $\sqrt{63} - 2\sqrt{7} =$

b. $2\sqrt{12} + \sqrt{27} =$

c. $\sqrt{20} - 3\sqrt{45} =$

d. $2\sqrt{54} + \sqrt{24} =$

e. $7\sqrt{50} - 4\sqrt{98} =$

Intervalos en la recta real

1) Para viajar desde su casa hasta su trabajo en colectivo. Claudio tarda, como mínimo, medio hora y, a lo sumo, una hora y cuarto. Si siempre sale de su casa a las 9 de la mañana. ¿Entre qué horas llega al trabajo? Expresen la respuesta en forma simbólica.

2) Raúl es lanzador de bala y sabe que, con buena suerte, puede lanzar la bala a 60m. Si para poder entrar en los juegos panamericanos, debe lanzarla, como mínimo, la tercera parte de su récord. ¿Cuáles son las marcas que debe registrar para competir? Escriban la respuesta simbólicamente.

Para observar

Los siguientes ejemplos muestran cómo se pueden expresar algunos subconjuntos de números reales, en forma de *intervalos*.

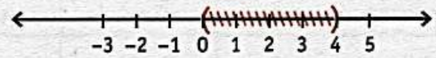
La expresión $x \in \mathbb{R}$ / se lee "*x* perteneciente a $\mathbb{R}$ tal que".

- *Intervalo cerrado*:

$[-2; 3] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 \leqslant x \leqslant 3\}$

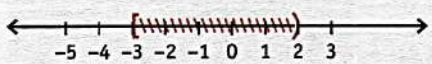
- *Intervalo abierto*:

$(0; 4) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x < 4\}$



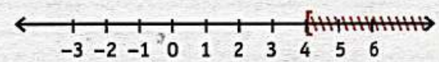
- *Intervalo semiabierto*:

$[-3; 2) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -3 \leqslant x < 2\}$

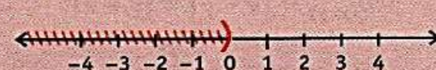
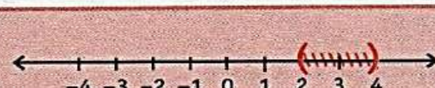


- *Intervalo infinito*:

$[4; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant 4\}$



3) Completar la siguiente tabla

Inecuación	Intervalo	Tipo de intervalo	Recta numérica
$-3 \leq x < 4$			
			
	$[-1; 1]$		
			
$0 \leq x \leq 6$			
$\frac{1}{2} < x \leq 1$			
			
	$\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right]$		

4) Representar en una recta numérica y escribir la solución.

a) $x > 5$
b) $x \geq 1$
c) $x < \frac{3}{2}$
d) $x \leq -2{,}5$
e) $-2 < x < 3$
f) $-5 \leq x \leq 0$
g) $2 < x \leq 7$
h) $-5 \leq x \leq 0$
i) $-4 \leq x < 1{,}5$

Módulo o valor absoluto

Para leer y recordar

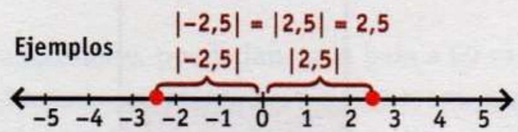
- Llamamos *módulo* o *valor absoluto* de un número real x a la distancia entre dicho número y el cero. Lo simbolizamos $|x|$, y como toda distancia, nunca toma valores negativos, es decir: $|x| \geq 0$ para cualquier valor de x.

Formalmente, se define así:

Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$

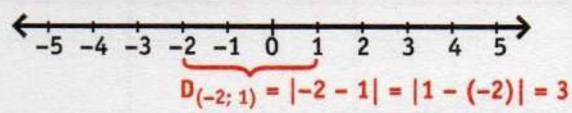
Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$

Ejemplos



- El módulo nos permite expresar, también simbólicamente, la *distancia D* entre dos números reales x e y:

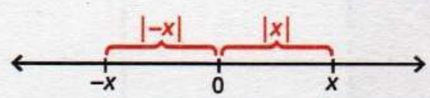
$$D_{(x;\,y)} = |x - y| = |y - x|$$



Algunas propiedades del módulo

Para todo número real x, se cumple que:

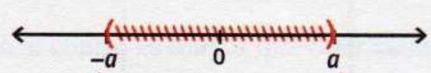
- $|x| = |-x|$



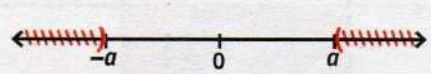
- $\sqrt{x^2} = |x|$

Si $a > 0$:

- $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$



- $|x| > a \Rightarrow x > a$ o $x < -a$



1) Escriban el módulo de los siguientes números

a) $\left|\sqrt{\frac{4}{9}}\right| =$

b) $|-2,\widehat{34}| =$

c) $|(-6)^3| =$

d) $|\sqrt[3]{-27}| =$

e) $\left|-\sqrt[4]{0,0016}\right| =$

f) $\left|\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}\right| =$

2) Representar en la recta numérica y escribir la solución.

a) $|x| < 3$
b) $|x| \geq 2$
c) $|x| \leq 4$
d) $|x| > \frac{5}{2}$
e) $|x| < \frac{9}{2}$

Ecuaciones con Módulo

Para observar

En los siguientes ejemplos, observen cómo se resuelven algunas ecuaciones que involucran módulos.

$|x| = 2$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$|x - 5| = 2$

$x - 5 = 2 \qquad x - 5 = -2$

$x = 2 + 5 \qquad x = -2 + 5$

$x_1 = 7 \qquad x_2 = 3$

$x^2 = 4$

$|x| = \sqrt{4}$

$|x| = 2$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

3) Gonzalo resolvió las siguientes ecuaciones. Corrijan los errores que encuentren

a) $X^2 = \frac{1}{9}$

$|X| = \sqrt{\frac{1}{9}}$

$X = \frac{1}{3}$

b) $X^3 = 125$

$X = \sqrt[3]{125}$

$X = 5$

c) $X^4 = \frac{81}{16}$

$|X| = \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$

$|X| = \frac{3}{2}$

$X_1 = \frac{3}{2} \qquad X_2 = -\frac{3}{2}$

d) $X^5 = 1$

$|X| = \sqrt[5]{1}$

$|X| = 1$

$X_1 = 1 \qquad X_2 = -1$

4) Hallar el conjunto solución

a) $x^2 + 3 = 28$
b) $x^2 + 4 = 20$
c) $|x + 3| = 4$
d) $|3 - x| = 5$
e) $3. |x - 1| + 2 = 11$
f) $10 = 5. |4 - 2x|$
g) $5. |2x - 1| + 1 = 6$
h) $2 - 3. |x + 1| =$-7
i) $-5 + |3 - 3x| =$-2
j) $|4 + 2x| = -10$

5) Elegir la opción correcta

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $\frac{1}{2} + 3.|-6 + 5x| = \frac{15}{2} + 3$?

a. $x = \frac{15}{28} \vee x = \frac{15}{8}$

b. $x = \frac{28}{15} \vee x = \frac{8}{15}$

c. $x = \frac{28}{8} \vee x = \frac{15}{8}$

Inecuaciones con módulo

6) ¿Cuáles son los números enteros que están a más de una unidad de distancia del 5, pero menos de 9? ¿Y los números reales que cumplen la misma condición?

Para observar

En los siguientes ejemplos, observen cómo se resuelven algunas inecuaciones que involucran módulos.

- $|x - 2| < 3$

$x - 2 < 3$ y $x - 2 > -3$

$x < 3 + 2$ y $x > -3 + 2$

$x < 5$ y $x > -1$

El conjunto solución es el intervalo abierto (−1; 5).

S = (−1; 5)

- $|x + 3| \geq 1$

$x + 3 \geq 1$ o $x + 3 \leq -1$

$x \geq 1 - 3$ o $x \leq -1 - 3$

$x \geq -2$ o $x \leq -4$

El conjunto solución es la unión del intervalo (−∞; −4] con el [−2 +∞).

S = (− ∞; −4] ∪ [−2; +∞)

7) Resolver las siguientes inecuaciones con módulo

a) $|x-2| \leq 5$

b) $|x+4| \geq 7$

c) $|2x+3| < 9$

d) $|3x-1| > 5$

e) $|3-x| \leq 5$

f) $2.|x+1| < 6$

g) $|5+2x| < 2$

8)

Colocá SÍ (si existe) o NO (si no existe) un valor que verifique cada igualdad.

a. $|x+6|=5$ ☐

b. $|x|+1=-3$ ☐

c. $7+|x|=7$ ☐

d. $|x|.4=-12$ ☐

e. $|-3|+|x|=0$ ☐

f. $|2x|=-8$ ☐

g. $-5+|x|=-2$ ☐

h. $-|x+3|=-1$ ☐

i. Escribí si existe el o los valores que verifiquen la igualdad.

9)

Hallá los valores de x que verifican cada igualdad.

a. $|x+2|-7=1$

b. $5.|x-1|=20$

c. $|4-x|:2=5$

d. $|3x-1|=8$

e. $2.|x+5|-3=7$

f. $|2x+3|-1=12$

Función cuadrática

1) Jorge, jugando con su perro lanza desde el suelo un palo hacia arriba. La expresión que permite calcular la altura en metros que alcanza el palo, en función de los segundos transcurridos es:

$H = -t^2 + 6t$

Tiempo T	Altura H
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Si el animal no logra interceptar el palo ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que caiga nuevamente al piso?

Para ayudarte:

- Completa la tabla y luego representa la función en los ejes cartesianos
- Observa tu gráfico y responde:

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzó el palo?

b) ¿Qué altura alcanzó el palo luego de transcurrido el primer segundo? ¿Y a los 3 segundos?

c) ¿Cuánto tiempo tardó el palo en retornar al suelo? ¿Qué altura alcanzó en ese instante?

d) ¿Es posible encontrar la solución al problema trabajando solamente con la fórmula? ¿Cómo?

A la función polinómica de segundo grado **$f(x) = ax^2 + bx + c$**, siendo *a*, *b*, *c* números reales y $a \neq 0$, se la denomina **función cuadrática**.

Los términos de la función reciben los siguientes nombres: $y = \underbrace{ax^2}_{\text{Término cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{Término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Término independiente}}$.

2) Completa la tabla de valores y grafica la función

$Y = -x^2 + 2x + 3$	
x	**Y**
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

4	

Elementos de la parábola:

Ordenada al origen: Es el punto de intersección de la gráfica con el eje ¨y¨.

- ¿Cuáles son las coordenadas de la ordenada al origen?
- Piensa en la fórmula de la función ¿Cómo podrías calcular la ordenada al origen a partir de esta?
- ¿Podríamos encontrar un procedimiento que nos permita hallar la ordenada al origen de cualquier función cuadrática?

Raíces o ceros de la parábola: Son los puntos de intersección de la gráfica y el eje ¨x¨

- ¿Cuáles son las coordenadas de las raíces?
- ¿Qué valores toma la variable ¨y¨ en ambos casos?
- La siguiente fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$ permite encontrar los ceros o raíces de una función cuadrática. Calcula las raíces utilizando la fórmula resolvente.

Eje de simetría: Es la recta que divide a la parábola en dos partes simétricamente iguales.

- En nuestra función sería x=

Las siguientes fórmulas nos permiten calcular el eje de simetría de cualquier parábola

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{o} \quad x_v = \frac{-b}{2.a}$$

- Utilizando la fórmula que vos quieras, calcula el eje de simetría de la parábola.

Vértice de la parábola: Es el punto de intersección entre el eje de simetría y la función. (Punto máximo o mínimo de la función)

- ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la función?
- Conociendo el eje de simetría y la fórmula de la función ¿Podes calcular el vértice? ¿Cómo?

4) Vuelve al problema del perro y el palo

- Completa las oraciones a partir de la función que se planteaba en el problema

a) Los coeficientes de los términos de la función son: a=   b=   c=

b) La ordenada al origen es el punto

c) Las raíces de la función son:

d) El eje de simetría de la parábola es la recta x=

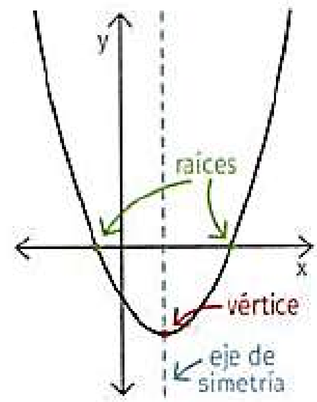
e) El vértice de la parábola es el punto:

La fórmula de una **función cuadrática** es $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ y es la ecuación **polinómica** de una **parábola** cuyos elementos son

- el vértice, que es su punto máximo o mínimo de la función.
- las raíces, que son los valores donde corta el eje x y pueden ser dos, uno o ninguno.
- el eje de simetría.

Para realizar el gráfico de una parábola, se debe hallar las raíces, el vértice, el eje de simetría y la ordenada al origen.

- Raíces: $x_1 ; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Vértice: $V = (x_v ; y_v)$ $\rightarrow x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \vee x_v = -\frac{b}{2a}$; $\rightarrow y_v = ax_v^2 + bx_v + c$
- Eje de simetría: $x = x_v$
- Ordenada al origen: $y = c$



3) Completa el siguiente cuadro y gráfica cada una de las funciones que se dan a continuación

Función	a	b	c	Ordenada al origen	Raíces	Eje de simetría	Vértice
y = x^2 - 6x + 5							
Y = x^2 - 8x + 12							
Y = -x^2 + 4x + 5							
y = x^2 - 4							
Y =x^2 - 4x							
Y = -x^2 + 5x							
Y = -2x^2							
Y = $\frac{1}{2}x^2$							
y = x^2 + 2x - 3							
y = x^2 + 2x + 1							

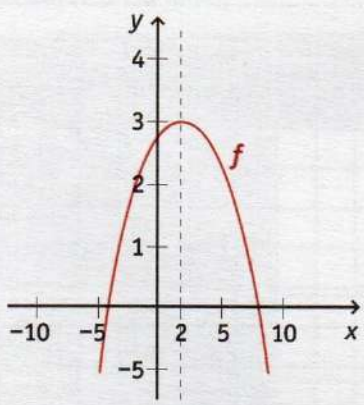
$y = x^2 + 6x - 7$							
$y = x^2 + 2$							
$y = x^2 - 6x + 9$							

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Máximos y mínimos

Para observar

La función $f(x) = -\frac{1}{12}(x-2)^2 + 3$ es creciente en $(-\infty; 2)$ y decreciente en $(2; +\infty)$.

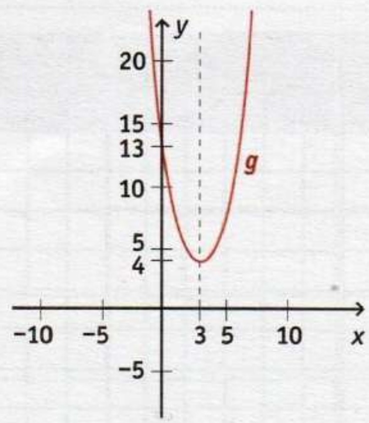
$\text{Im } f = (-\infty; 3]$



f tiene un máximo absoluto en $x = 2$.

La función $g(x) = (x-3)^2 + 4$ es creciente en $(3; +\infty)$ y decreciente en $(-\infty; 3)$.

$\text{Im } g = [4; +\infty)$

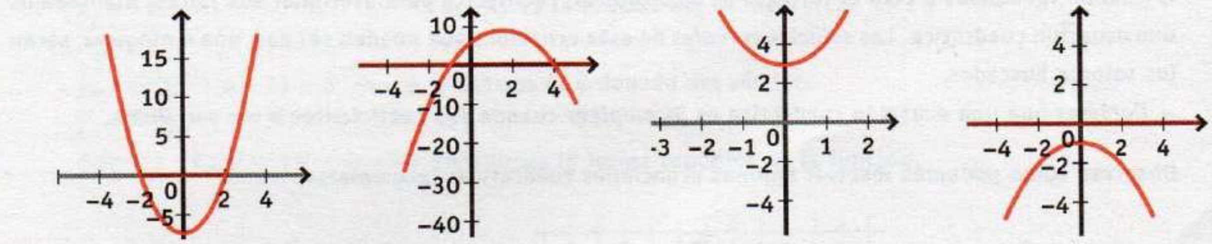


g tiene un mínimo absoluto en $x = 3$.

- La abscisa del vértice de una parábola determina sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- La ordenada del vértice de una parábola es el valor máximo o mínimo absoluto que toman las imágenes.

Conjuntos de positividad y negatividad. Ceros

Para observar



$C^+ = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	$C^+ = (-1; 4)$	$C^+ = \mathbb{R}$	$C^+ = \emptyset$
$C^- = (-2; 2)$	$C^- = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$	$C^- = \emptyset$	$C^- = \mathbb{R}$
$C^0 = \{-2; 2\}$	$C^0 = \{-1; 4\}$	$C^0 = \emptyset$	$C^0 = \emptyset$

4) Indiquen los intervalos de crecimiento, decrecimiento, conjunto de positividad y negatividad de las funciones anteriores.

Ecuación polinómica, canónica y factorizada

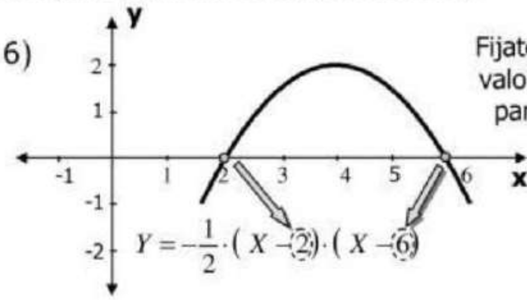
☆ **Ecuación Factorizada:**

$$\boxed{Y = a \cdot (X - x_1) \cdot (X - x_2)}$$

X_1 y X_2 son las raíces de la parábola, y "a" es el mismo "a" de siempre.

Ejemplo: grafiquemos la siguiente parábola dada en forma factorizada:

$$Y = -\frac{1}{2} \cdot (X - 2) \cdot (X - 6)$$



Fijate como las raíces son los valores que están dentro del paréntesis restando a la X

Ecuación Canónica de las funciones cuadráticas:

Esta es la forma general de la **Ecuación Canónica** de la parábola

$$\boxed{y = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v}$$

Es un factor que nos da idea de su "anchura"

X_v: Coordenada "x" del Vértice

Este número es la coordenada x del Vértice de la Parábola.

Y_v: Coordenada "Y" del Vértice

Este número es La coordenada "y" del Vértice de la Parábola.

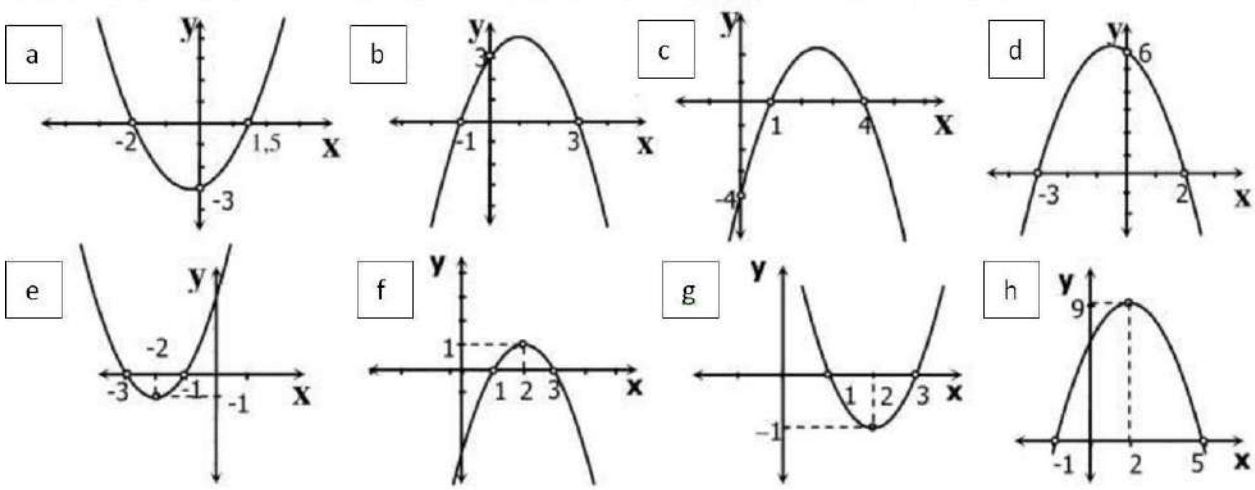
Coordenadas del Vértice: $V = (x_v, y_v)$

5)Completen la siguiente tabla

Forma factorizada	Forma polinómica	Forma canónica
$y = -(x-2) \, . \, (x+2)$		
	$y = 2x^2 + 4x - 6$	
$y = (x+3)^2$		
		$y = \frac{1}{2} \cdot (x-4)^2 - 8$

6)

<u>Reconstruir las ecuaciones de las siguientes parábolas (forma polinómica)</u>



7)

Hallá la ecuación que se pide de cada parábola.

a. Polinómica y canónica de $y = -3(x+5)(x-1)$.

b. Polinómica y factorizada de $y = 5(x+2)^2 - 20$.

c. Canónica y factorizada de $y = -2x^2 + 6x + 8$.

Función polinómica

1) Un meteorólogo halló que la temperatura (en °C) durante cierto día estaba dada por F(T)= 0,05t.(t-12).(t-24), donde t es el tiempo medido en horas, y t=0 corresponde a las 6am.

a) Completa la tabla de valores y luego realiza un gráfico aproximado de la función para $0 \leq t \leq 24$

Tiempo (t)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	24
Temperatura (°C)												

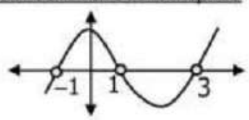
b) ¿En qué franja horaria las temperaturas fueron superiores a 0°C?
c) ¿En qué franja horaria las temperaturas fueron inferiores a 0°C?
d) ¿En qué momento hubo temperaturas de 0°C?
e) ¿Es verdad que la temperatura fue de 32°C a alguna hora entre las 12 del mediodía y la 1 pm?
f) Encontrar el polinomio que la representa,

Funciones Polinómicas con raíces simples: Ya conocemos las funciones cuadráticas, estas son funciones polinómicas de segundo grado. Como sabemos una forma de escribir estas funciones cuadráticas, es la factorizada: Sea $f(x) = \alpha\,.(x - X_1)\,.\,(X - X_2)$ $\begin{cases} \alpha \text{ es simplemente un factor (Distinto de cero).} \\ X_1 \text{ y } X_2 \text{ son las raíces o donde la función carta al eje x.} \end{cases}$

Si a esta función la multiplicamos por más binomios, tenemos funciones polinómicas de grados mayores a 2.
Ejemplo: Sea $f(x) = \alpha\,.(x–X_1)\,.\,(X–X_2)\,.\,(X–X_3) \Longrightarrow$ α es simplemente un factor. X_1 , X_2 y X_3 son las raíces.
En este caso f(x) es una función polinómica de grado 3.

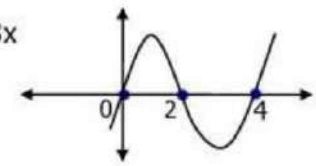
Ejemplos de funciones polinómicas con raíces simples:

$f(x) = (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$



$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

Como vemos en este caso la función no la tenemos factoreada.



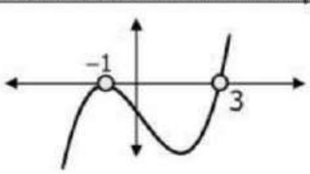
Importante: Una función polinómica de grado "n" tiene como máximo "n" raíces reales.

Funciones Polinómicas con raíces múltiples: Cuando factorizamos la función polinómica y nos encontramos con que alguno de los binomios está elevado a una potencia, entonces el número que hace cero a ese binomio es raíz múltiple. Si el binomio está elevado al cuadrado es una raíz doble, si está elevado al cubo es una raíz triple y así sucesivamente.

Ejemplos de funciones polinómicas con raíces múltiples:

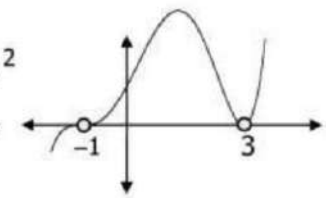
$f(x) = (x+1)^2\cdot(x-3)$

Aquí tenemos:
- Raíz doble en "x=–1"
- Raíz simple en "x=3"



$f(x) = (x+1)^3\cdot(x-3)^2$

Aquí tenemos:
- Raíz triple en "x=–1"
- Raíz doble en "x=3"



Importante: Como podemos ver en los gráficos anteriores, las raíces múltiples pares, en el gráfico son tangentes al eje "x" es decir que de ambos lados de la raíz la función es del mismo signo o sea, es siempre positiva o siempre negativa.

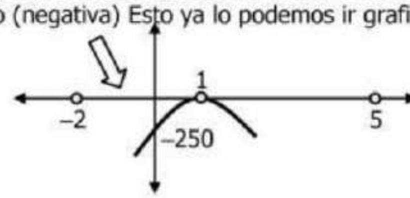
En cambio en las raíces múltiples impares la función "atraviesa" al eje "x" o sea, a ambos lados de la raíz, la función tiene distinto signo. O sea, a ambos lados de la raíz múltiple impar la función pasa de ser positiva a negativa o viceversa.

Gráficas aproximadas de funciones polinómicas: Estudiemos la construcción aproximada del gráfico "A partir de las raíces" Si tenemos la función factorizada, conocemos las raíces y el grado de multiplicidad de las mismas. Con ello y con algunas cuentas vamos a trazar la gráfica aproximada.

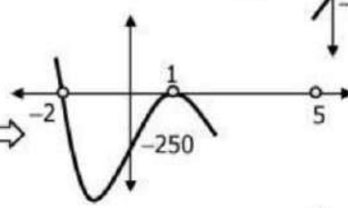
Ejemplo: $f(x) = (x+2)\cdot(x-1)^2\cdot(x-5)^3$

Para ello, probamos en x=0 (que es fácil de calcular)
$\Rightarrow f(0) = (0+2).(0–1)^2\,.\,(0–5)^3 = 2\,.\,1\,.\,(–125) \Rightarrow f(0)=–250$

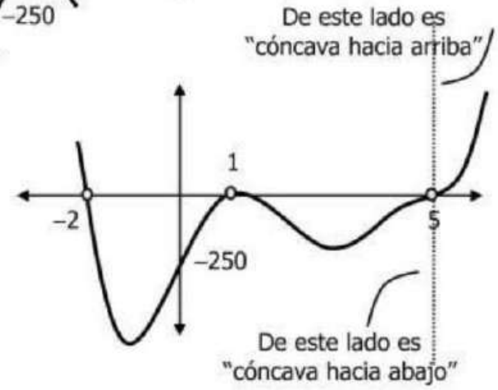
En primer lugar veamos la raíz "del medio" x=1, es de grado de multiplicidad par, por lo tanto va a ser tangente al eje "x", la pregunta es si a ambos lados de esa raíz será positiva o negativa la función. $\Longrightarrow$ $\Rightarrow$ Como es raíz doble, a ambos lados de la raíz x=1 la función es del mismo signo (negativa) Esto ya lo podemos ir graficando



$\Longrightarrow$ Ahora podemos graficar la parte de la raíz simple. Para ello sabemos que en x= –2 (Donde hay una raíz simple) la función pasa de ser negativa a positiva o viceversa, entonces el gráfico aproximado sería: $\Longrightarrow$



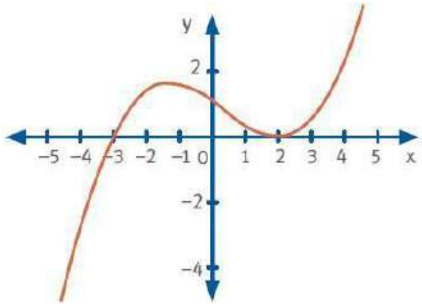
$\Longrightarrow$ Por último resta graficar la parte de la raíz triple. Y en este punto hay que tener en cuenta que **en una raíz de grado de multiplicidad impar mayor a 1, la función presenta un cambio de concavidad**, es decir que de un lado de la raíz y del otro, apartе de ser la función de distinto signo, también es de distinta concavidad. Lo graficamos aproximadamente entonces:



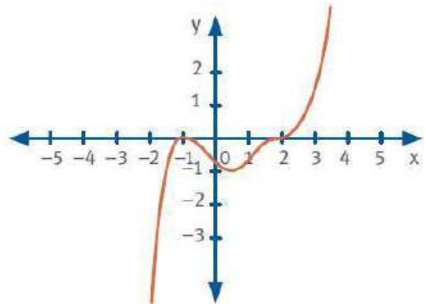
Nota: Para hacer el gráfico un poco más exacto habría que reemplazar "x" por valores intermedios entre las raíces en la función para tener otros puntos en el plano.

2) Para cada una de las siguientes funciones indicar sus ceros, el conjunto de positividad y negatividad

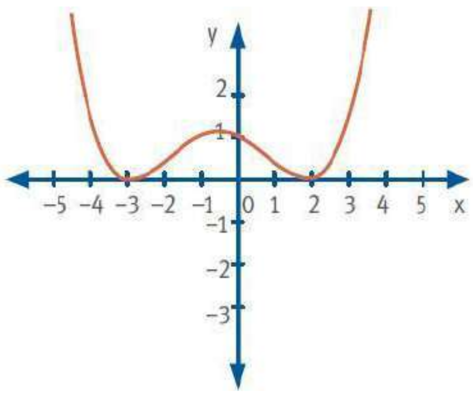
a.



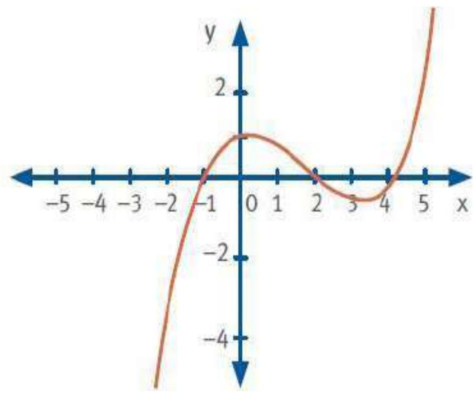
c.



b.



d.



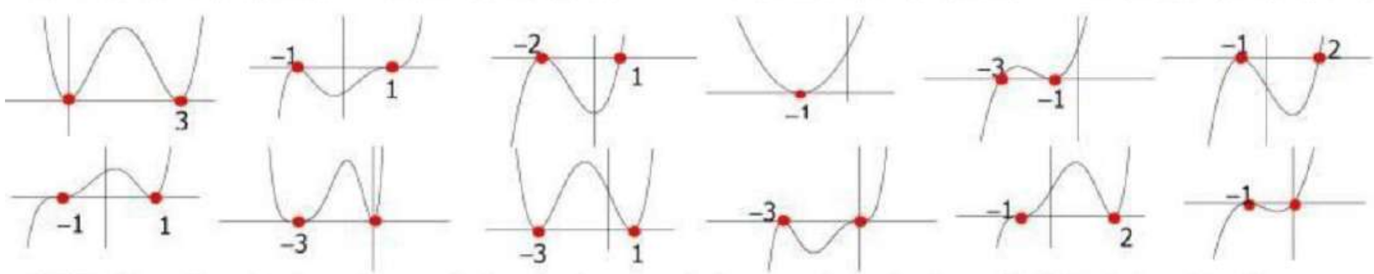
3)

Asociar cada una de las siguientes funciones con el gráfico que la representa, en función a sus raíces:

15) $P(x)=(x-1)^2\cdot(x+3)^2$ 18) $P(x)=x^2\cdot(x+3)^4$ 21) $P(x)=(x+1)^2\cdot(x-1)^3$ 24) $P(x)=x^2+2x+1$

16) $P(x)=x^3\cdot(x+3)^2$ 19) $P(x)=(x+1)^3\cdot(x-2)^2$ 22) $P(x)=x^2\cdot(x-3)^2$ 25) $P(x)=(x-1)\cdot(x+2)^2$

17) $P(x)=(x+1)^2\cdot(x+3)$ 20) $P(x)=x\cdot(x+1)^2$ 23) $P(x)=(x-1)^2\cdot(x+1)^3$ 26) $P(x)=(x+1)^2\cdot(x-2)$



27) Indicar el grado de cada una de las funciones anteriores y el grado de multiplicidad de cada raíz.
28) Escribir Dominio e imagen de cada una de las funciones anteriores.
29) Escribir los intervalos de positividad y negatividad de cada una de las funciones anteriores.

4) Graficar las siguientes funciones e indicar en cada una: raíces, ordenada al origen, conjunto de positividad y negatividad. Encontrar el polinomio que la representa.

a. $f(x) = x^2 \cdot (x + 2)$

b. $f(x) = (x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2$

c. $f(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

d. $f(x) = x^4 \cdot (x - 2)^3$

e. $f(x) = 2x \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 3)$

f. $f(x) = 3x \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$

3) Realicen el gráfico de las siguientes funciones polinómicas y luego indiquen en cada una: raíces, ordenada al origen, conjunto de positividad y negatividad.

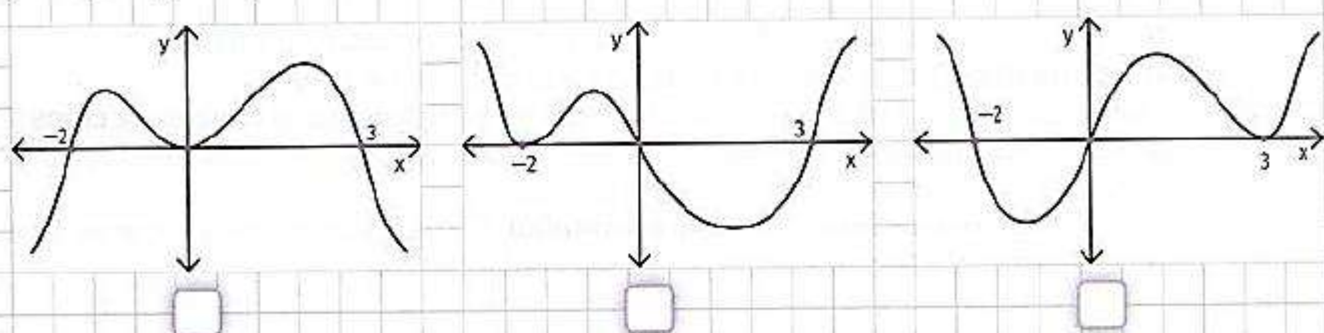
a) $g(x) = x^3 - 4x$

b) $h(x) = x^3 - x^2$

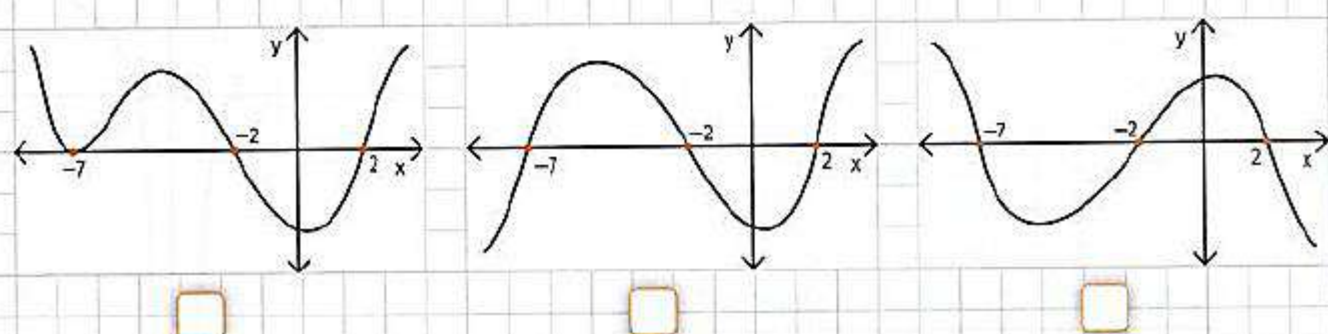
4)

Marcá con una X la gráfica que corresponde a cada función.

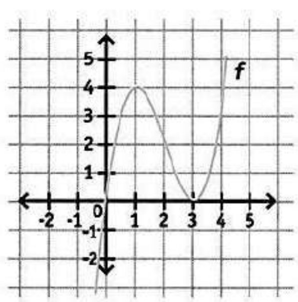
a. $y = x(x+2)(x-3)^2$

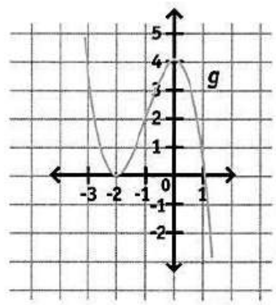


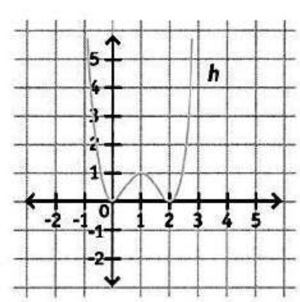
b. $y = (x-2)(x+7)(x+2)^3$



5) Observen los siguientes gráficos







a) Identifiquen cuáles de las siguientes fórmulas corresponden a las funciones *f*, *g* y *h*.

I. $x^2(x-2)^2$ **III.** $-(x+2)^2\,(x-1)$ **V.** $(x+2)^2\ \ (x-1)$

II. $x^2(x-3)$ **IV.** $x(x-3)^2$ **VI.** $x^2(x+2)^2$

b) Indiquen los conjuntos de positividad y negatividad de cada una de las funciones.

6) Escriban la letra del gráfico que corresponde a cada función

a. 3.(x - 2) . (x + 1) . (x - 1)

b. -3. (x - 2).(x + 1).(x - 1)

c. (x + 2).(x - 1).(x + 3)

d. (x - 2). (x + 1) .(x - 1)

GRÁFICO A

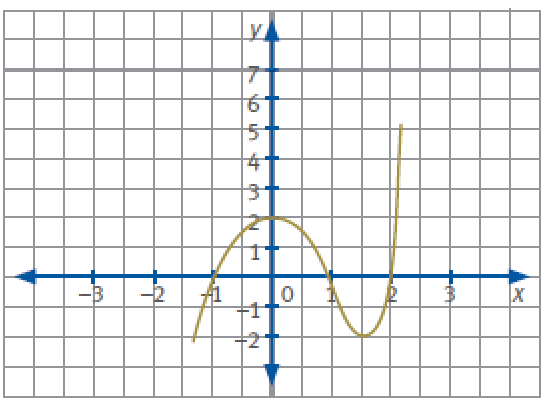


GRÁFICO C

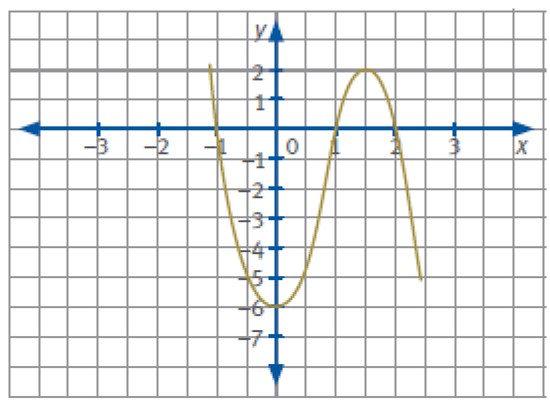


GRÁFICO B

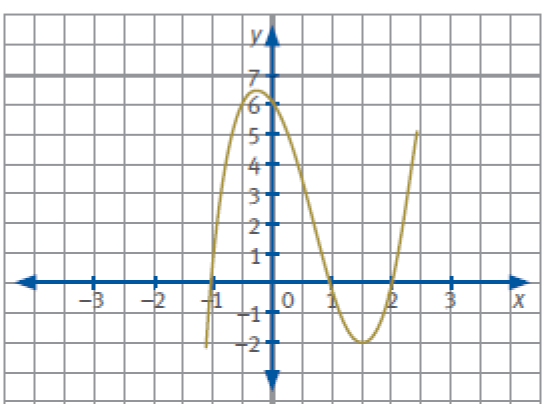
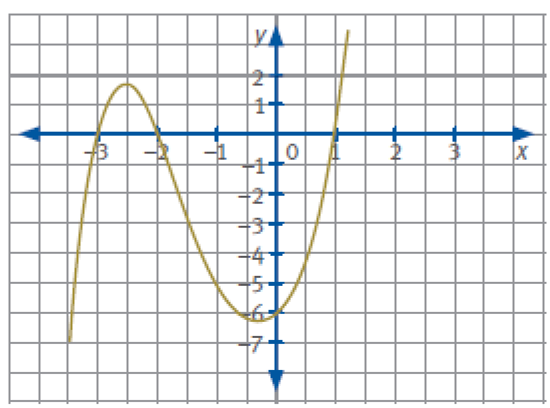
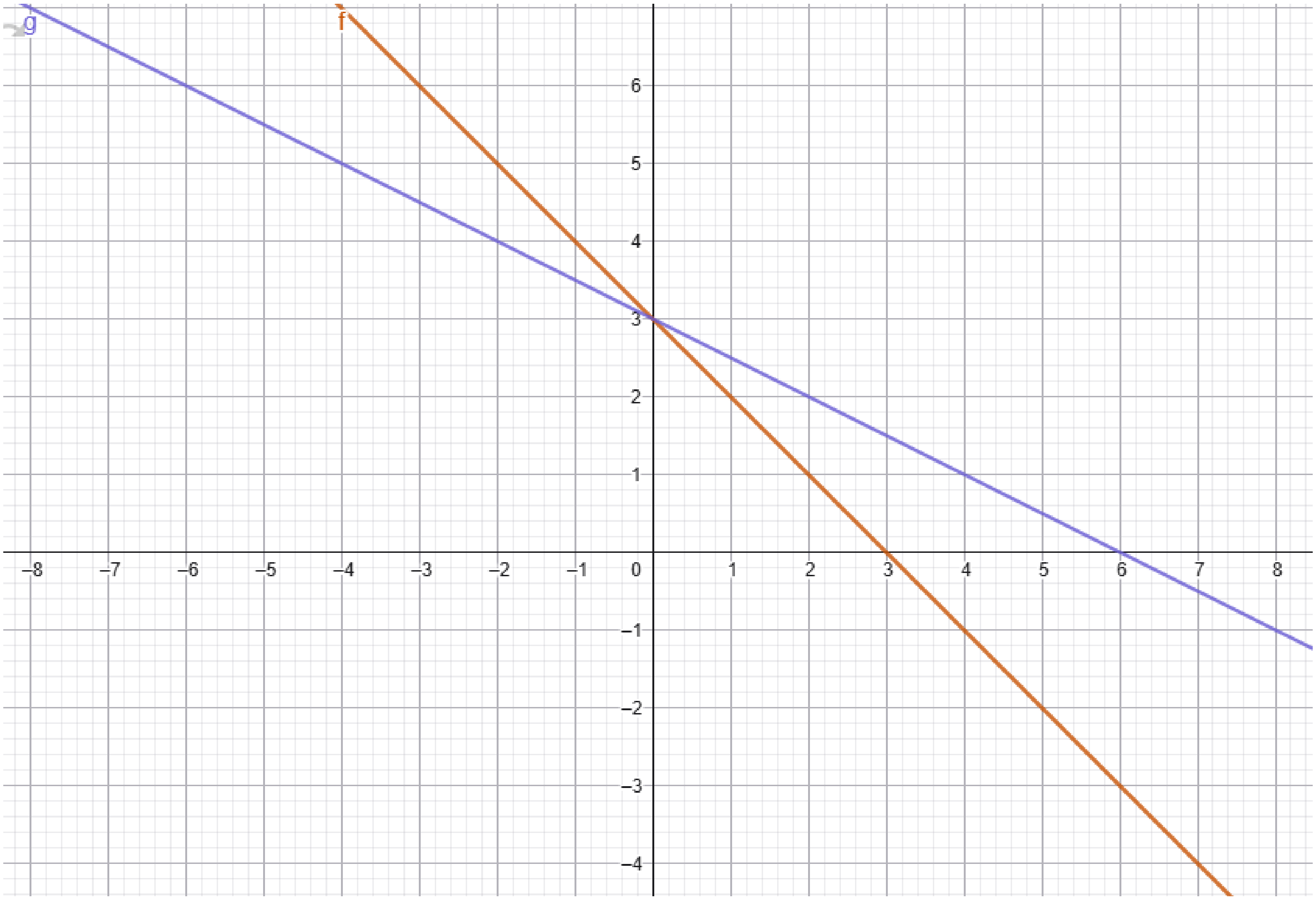


GRÁFICO D



Actividad integradora

1) En el siguiente sistema de coordenadas se dan las gráficas de f(x) y g(x), ambas funciones lineales



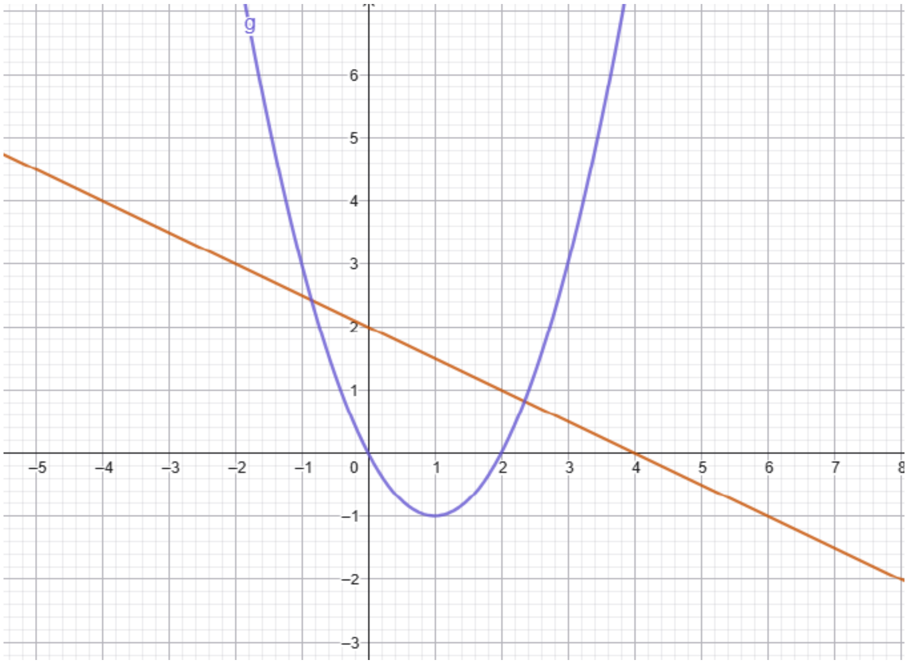
a) Considerá la función h(x)= f(x). g(x). Si se quiere calcular el valor de h cuando, por ejemplo x=1, podés hacer h(1)= f(1)x g(1)= 2 x 2,5 = 5

h(2)=
h(4)=
h(-1)=

b) Encontrá otros 3 puntos que pertenezcan al gráfico h(x). Construí un gráfico aproximado de la función h(x)

c) Establecer el conjunto de valores de x para los cuales la función h(x) es positiva, negativa o cero.

2) A continuación se propone el gráfico de la función lineal f(x) y la función cuadrática g(x)



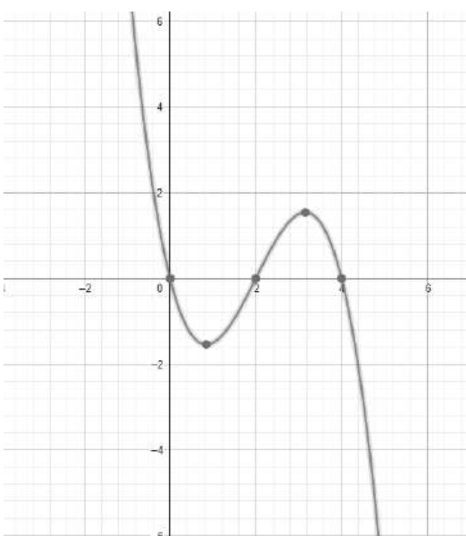
Ahora, considerá la función producto h(x)= f(x) x g(x)

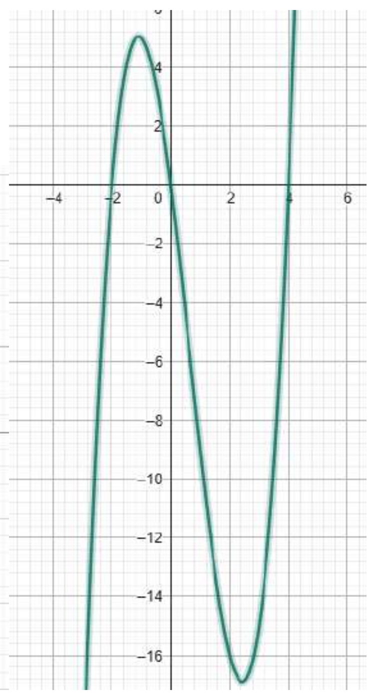
a) Calculá el valor de la función h en cada caso. Por ejemplo h(1)= f(1)x g(1)= 1,5x(-1)= -1,5

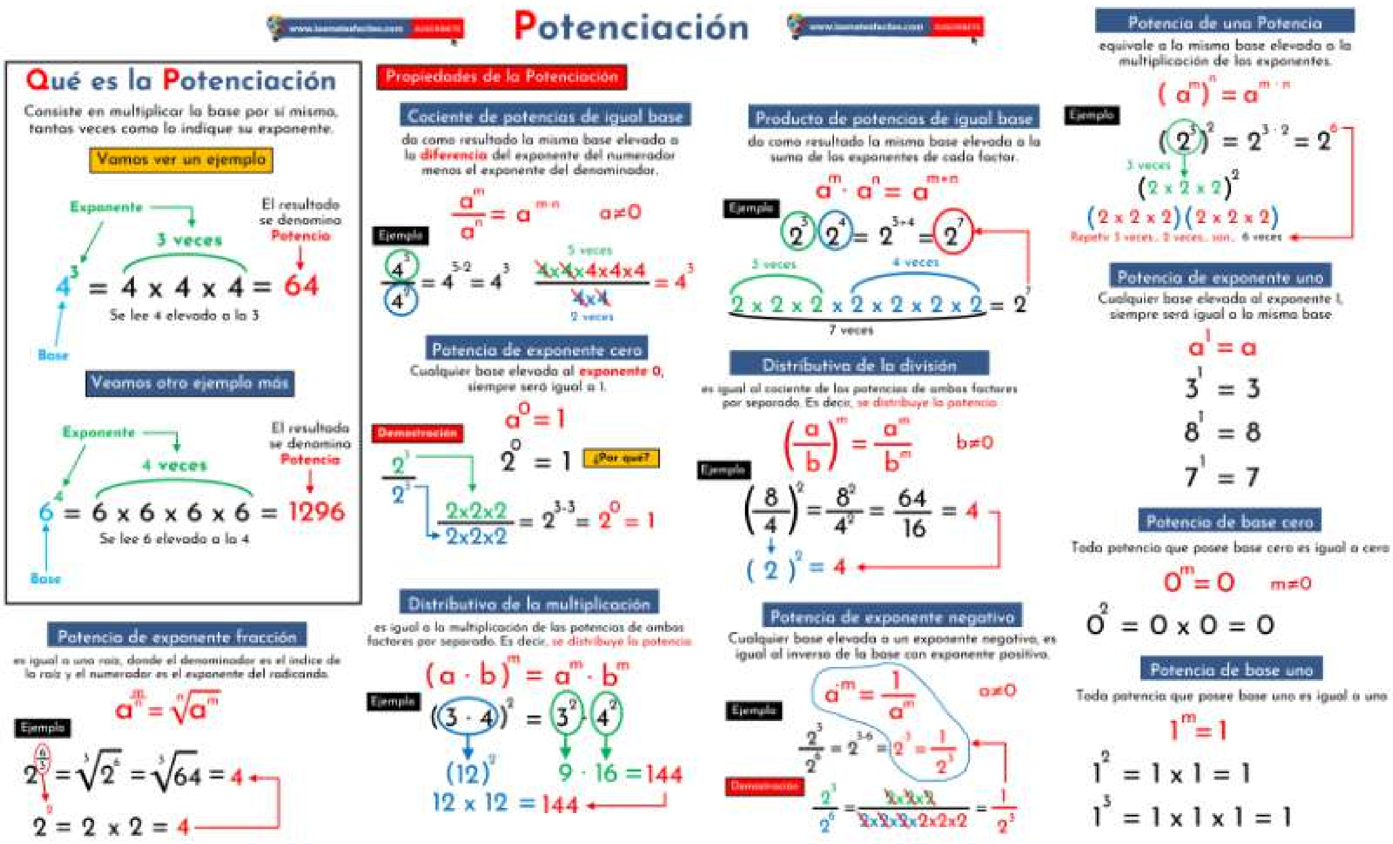
   h(-1)=
   h(0)=
   h(2)=
   h(3)=
   h(4)=

b) Indicá los ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad

c) ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde a la función h(x)







Función Exponencial

1) En cierto cultivo se reproducen bacterias que se triplican diariamente.

a. Calcular cuántas habrá al cabo de cinco días si inicialmente hay una bacteria.

b. ¿Cuántos días transcurrieron si la cantidad de bacterias asciende a 19683?

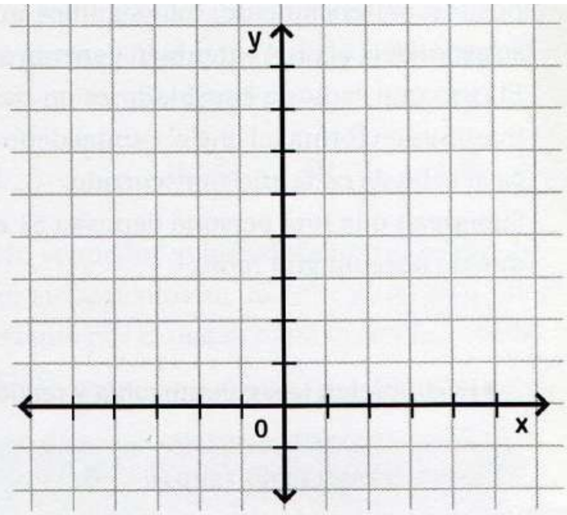
c. Representar mediante un gráfico la relación que existe entre el tiempo (x) y la cantidad de bacterias (y) considerando como x=1 al primer día.

d. La fórmula que relaciona el tiempo con la cantidad de bacterias es:

a) $y = 3.x$ b) $y = 3^{x-1}$ c) $y = 3^x$ d) $y = x^3$

2) Consideren la función $f(x) = 2^x$, cuyo dominio es R

x	$y = 2^x$
0	
1	
2	
3	
-1	
-2	
-3	



b) Observen el gráfico que hicieron y contesten a las preguntas.

I. ¿Cuál es el conjunto imagen de f? = ...

II. ¿f es creciente o decreciente? ....

III. ¿Tiene algún punto de contacto con el eje de ordenadas? ¿Cuál? ....

IV. ¿Tiene algún punto de contacto con el eje de abscisas? ¿Cuál? ....

V. ¿Qué ocurre con la gráfica de $f(x)$ cuando x toma valores positivos "muy grandes"?

....

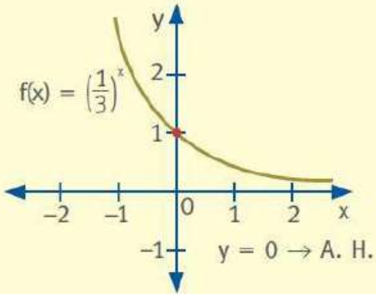
VI. ¿Qué sucede con la gráfica de $f(x)$ cuando x toma valores negativos cada vez menores?

....

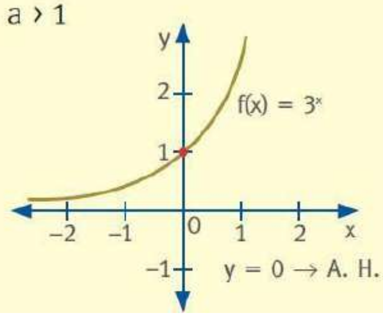
Se denomina **función exponencial** a toda función de la forma $f(x) = k \, . \, a^{x-b} + c \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$.

- Funciones de la forma $f(x) = a^x$

1. $0 < a < 1$



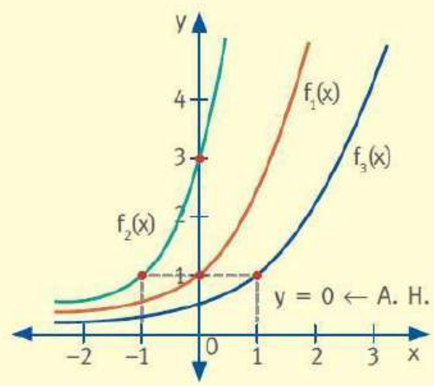
2. $a > 1$



- Funciones de la forma $f(x) = k \, . \, a^{x-b}$

Indica el corrimiento sobre el eje *x*.

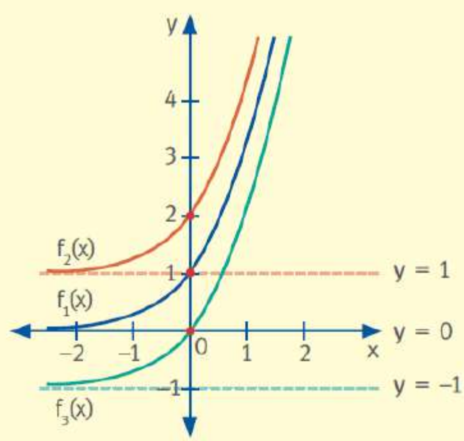
$f(x) = a^{x-b}$	b	Corrimiento
$f_1(x) = 3^x$	0	No tiene.
$f_2(x) = 3^{x+1}$	–1	1 hacia la izquierda.
$f_3(x) = 3^{x-1}$	1	1 hacia la derecha.



- Funciones de la forma $f(x) = a^x + c \wedge c \in \mathbb{R}$

Indica el corrimiento sobre el eje *y*.

$f(x) = a^x + c$	c	Corrimiento	A. H.
$f_1(x) = 3^x$	0	No tiene.	$y = 0$
$f_2(x) = 3^x + 1$	1	Hacia arriba, 1.	$y = 1$
$f_3(x) = 3^x - 1$	–1	Hacia abajo, 1.	$y = -1$

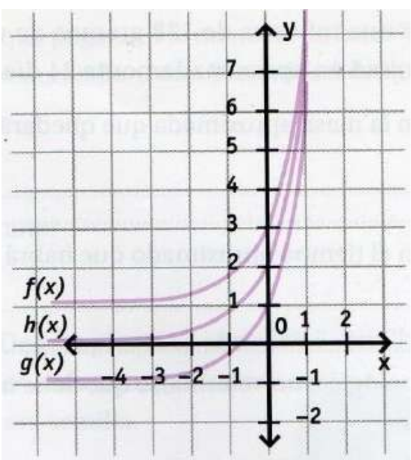


3) Completar las tablas, construir el gráfico y analizar.

x	$y = 2^x + 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

4) Observen detenidamente los siguientes gráficos, que corresponden a funciones del tipo $(x) = k.a^x + b$, y completen el cuadro



	k	a	b	Conjunto imagen	Asíntota
$f(x) = 2 \cdot 3^x + 1$					
$g(x) = 2 \cdot 3^x - 1$					
$h(x) = 2 \cdot 3^x$					

5) Unan con flechas cada función con su respectivo conjunto imagen

$f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$(2; +\infty)$
$g(x) = 2 \cdot 3^x$	$(-\infty; 0)$
$d(x) = 10^x + 2$	$(-\infty; -1)$
$h(x) = -0{,}1^x - 1$	$(0; +\infty)$

6) Indiquen cuál es la fórmula que corresponde a cada gráfico

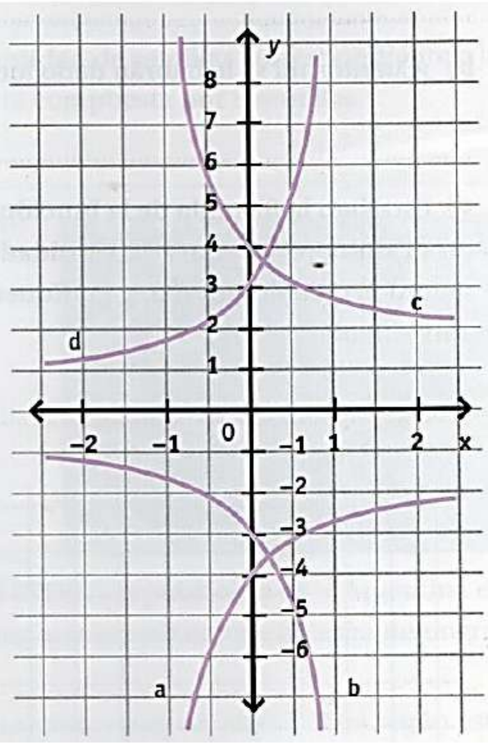
- $f_1(x) = 2 \cdot 5^x + 1$
- $f_2(x) = -2 \cdot 5^x - 1$
- $f_3(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 2$
- $f_4(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2$

....

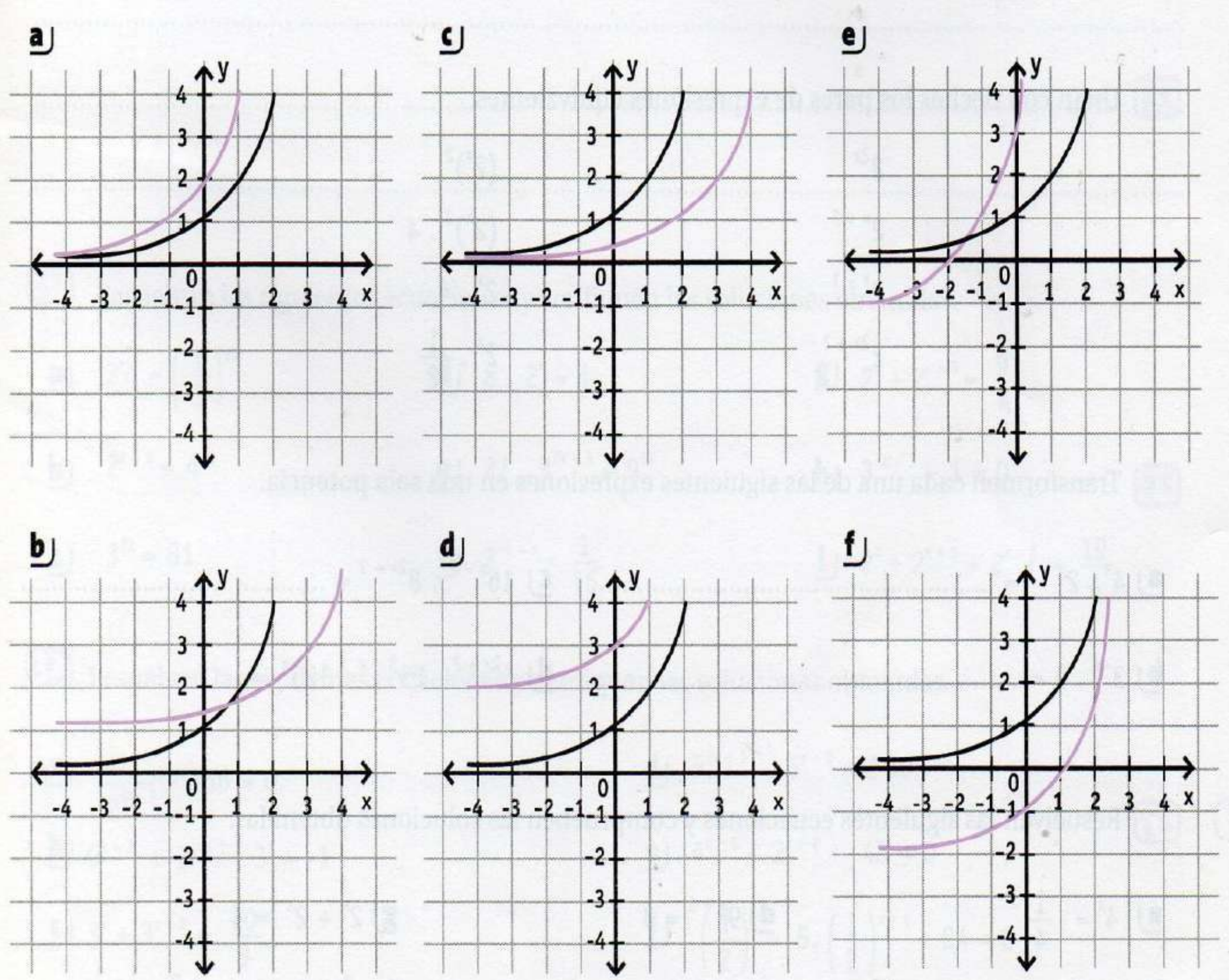
....

....

....



7) Sabiendo que la función graficada en color negro corresponde a $(x) = 2^x$. Indiquen cuál es la fórmula que corresponde a la curva de color en cada caso.



I. $y = 2^x + 2$

II. $y = 2^x - 2$

III. $y = 2^{x+1}$

IV. $y = 2^{x-2}$

V. $y = 2^{x+2} - 1$

VI. $y = 2^{x-2} + 1$

Ecuaciones Exponenciales

Una **ecuación exponencial** es aquella en la que la incógnita aparece en el exponente.
Para resolver una ecuación exponencial, hay que tener en cuenta:

1. $a^x \Rightarrow a > 0 \wedge a \neq 1$
2. $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$
3. Las propiedades de las potencias.

Resuelvan las siguientes ecuaciones exponenciales.

a. $3^{2x+1} = 81$

$3^{2x+1} = 3^4 \Rightarrow 2x + 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

b. $\sqrt[2x+2]{2^{x+3}} = \sqrt{8}$

$2^{\frac{x+3}{2x+2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{x+3}{2x+2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 0$

1) Resolver y luego unir

a. $3^x = 243$	$x = 8$
b. $5^x = 625$	$x = 1$
c. $2^x + 1 = 257$	$x = 5$
d. $2^{x+1} = 8\,192$	$x = 12$
e. $2^{2x} = 2^{x+1}$	$x = 4$

2) Hallar el valor numérico de ¨x¨ que hace verdadera cada igualdad.

a) $2^{2x+1} = 4$
b) $2^{x+4} = \frac{1}{8}$
c) $5^{12-x} = 125$
d) $3^x + 3^x = 18$
e) $4^{2x+1} = \frac{1}{64}$
f) $7^{x+3} - 2 = -1$
g) $6^{3x-2} = 1296$
h) $2^{x-3} = \frac{1}{16}$
i) $10^{3x} = \frac{1}{1000}$
j) $4^x - 4 = 60$
k) $5^x + 5^x = 50$

Logaritmo

RECORDAR

PARA LEER

El *exponente* x al que hay que elevar una *base* b para obtener un determinado número a se llama *logaritmo* de dicho número en esa base.

Es decir $b^x = a \iff x = \log_b a$

(donde a y b son números reales, $b > 0$, $b \neq 1$, $a > 0$)

Por ejemplo: $\log_2 16 = 4$, porque $2^4 = 16$

$\log_3 \frac{1}{9} = -2$, porque $3^{-2} = \frac{1}{9}$

$2^x = 32 \iff x = \log_2 32 \Rightarrow x = 5$

$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 \Rightarrow x = 8$

1) Calcular los siguientes logaritmos

a) $log_3 27 =$

b) $log\ 100 =$

c) $log_9 1 =$

d) $log_3 \frac{1}{9} =$

e) $log_{12} 144 =$

f) $log\ \frac{1}{100} =$

g) $log_5 5 =$

h) $log_2 \frac{1}{8} =$

i) $log_4 \frac{1}{64} =$

j) $log_3 0 =$

La función logarítmica

2) Considera las funciones $f(x) = log_2 x$ y $g(x) = log_{\frac{1}{2}} x$. Completa las tablas y construye el gráfico.

x	$y = log_2 x$
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
8	

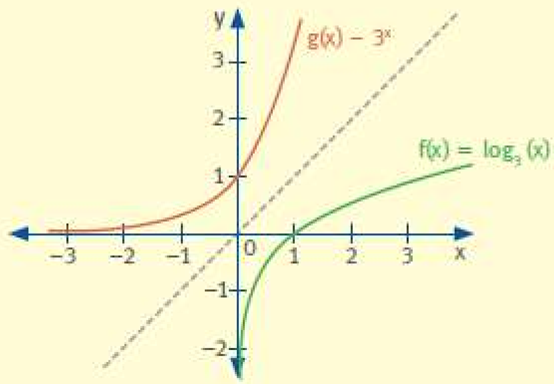
x	$y = log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
8	

a) Indicar Dominio, imagen y ceros de cada función.
b) ¿Corta al eje de ordenadas? ¿Por qué?
c) ¿Qué se observa, en ambas gráficas, cuando los valores se aproximan a cero?
d) Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada función.

Se define **función logarítmica** de base *a*, a la función inversa de la función exponencial de base *a*.
$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x \wedge x > 0 \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$

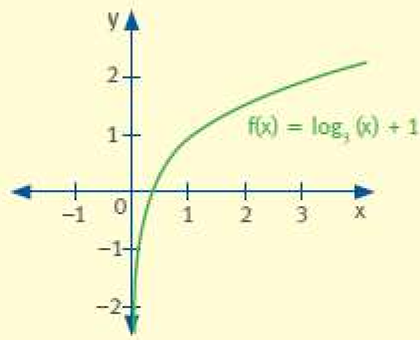
• $f(x) = y = \log_3 x \Leftrightarrow 3^y = x$ $\quad D_f = (0;+\infty) \wedge C_f = \mathbb{R}$ $\quad$ A. V.: $x = 0$
Intersección con el eje x: $f(x) = 0$, entonces $\log_3 x = 0 \Rightarrow 3^0 = x \Rightarrow x = 1$

x	$y = \log_3 x$
$\frac{1}{9}$	−2
$\frac{1}{3}$	−1
1	0
3	1
9	2



• $f(x) = \log_3 x + 1$ $\quad D_f = (0;+\infty) \wedge C_f = \mathbb{R}$ $\quad$ A. V.: $x = 0$
Intersección con el eje x, $f(x) = 0$, entonces $\log_3 x + 1 = 0 \Rightarrow 3^{-1} = x \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

x	$y = \log_3 x + 1$
$\frac{1}{9}$	−1
$\frac{1}{3}$	0
1	1
3	2
9	3



2) **Completar las tablas de valores, construir el gráfico para cada función y luego analizar en cada caso:**

Dominio, imagen, asíntota vertical, ordenada al origen, ceros o raíces, Intervalo de crecimiento/decrecimiento, conjunto de positividad y negatividad.

x	$y = log_2(x+2)$
-2	
-1,75	
-1,5	
-1	
0	
2	
6	
14	

x	$y = log_2(x-2)$
2	
2,25	
2,5	
3	
4	
6	
10	
18	

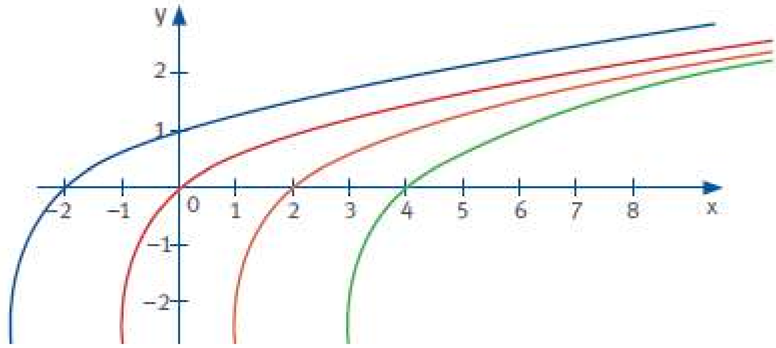
3) Indicar que gráfica corresponde a cada función

a. $f(x) = \log_3 (x + 1)$

b. $g(x) = \log_3 (x - 1)$

c. $h(x) = \log_3 (x + 3)$

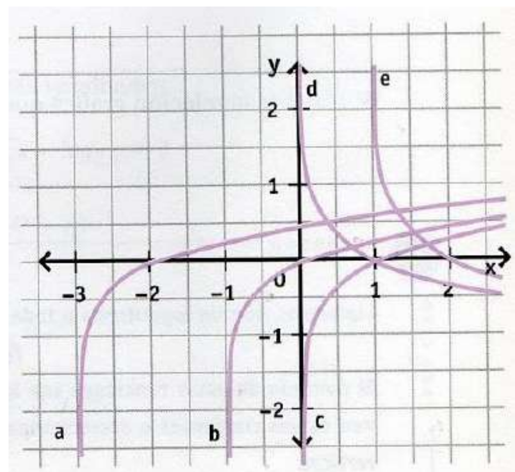
d. $i(x) = \log_3 (x - 3)$



Indicar para cada función su Dominio, Imagen, cero o raíz, conjunto de positividad, negatividad y asíntota Vertical.

4) Indicar en el gráfico cuál es la curva que corresponde a cada una de las funciones y completar el cuadro.

Curva	Fórmula	Dominio	Conjunto imagen	Asíntota	f(0)	ceros
	$\log x$					
	$-\log x$					
	$\log (x + 3)$					
	$-\log (x - 1)$					
	$\log (x + 1)$					



Logaritmos decimales y logaritmos naturales

RECORDAR

PARA LEER

Si la base del logaritmo es 10, se llama *logaritmo decimal* y se puede escribir *log*, sin indicar la base.
Si la base es el *número e (e = 2,718...)*, se denomina *logaritmo natural* o *logaritmo neperiano* y se escribe *ln*. Se denomina "neperiano" en honor de John Neper (1550–1617), matemático escocés a quien se atribuye el concepto de logaritmo.
Tanto los logaritmos naturales como los decimales aparecen en las calculadoras científicas.

5)

a) Utilicen las teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$ de una calculadora científica para obtener los siguientes logaritmos (redondeen a los milésimos).

I. $\log 9{,}8 =$ .... V. $\ln 2{,}5 =$ ....

II. $\log 98 =$ .... VI. $\ln 25 =$ ....

III. $\log 980 =$ .... VII. $\ln 250 =$ ....

IV. $\log 9\,800 =$ .... VIII. $\ln 2500 =$ ....

b) Analicen los valores que obtuvieron y enuncien alguna conclusión.

....

6) Apliquen la definición de logaritmo de un número para resolver las siguientes ecuaciones y luego verifiquen las soluciones que obtengan.

a) $\log_3 x = 4$ **c)** $\log_3 (x + 2) = 2$ **e)** $\log_{12} (2x - 6) + 3 = 3$

b) $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = x$ **d)** $2 \cdot \log_4 x = -4$ **f)** $-3 \log_3 x^2 - 8 = -14$

Propiedades de los logaritmos

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$

   $\log_3 1 = 0 \Leftrightarrow 3^0 = 1$

2. $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$

   $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \wedge x > 0 \wedge y > 0$

   $\log_5 (5 \cdot 25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$

4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \wedge x > 0 \wedge y > 0$

   $\log_3 \frac{81}{27} = \log_3 81 - \log_3 27 = 4 - 3 = 1$

5. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

   $\log_6 216^4 = 4 \cdot \log_6 216 = 4 \cdot 3 = 12$

7) Resuelvan aplicando las propiedades de los logaritmos y sin usar calculadora

a) $log_2\ (8 \cdot 32) =$ ....

b) $log_3 \left(27 \cdot \frac{9}{81}\right) =$ ....

c) $log_4\ 64^6 =$ ....

d) $log \left(\frac{10 : 0{,}01}{0{,}001}\right) =$ ....

e) $log_3 \left(\sqrt[3]{81}\right)^5 =$ ....

Para calcular logaritmos en los cuales el argumento no es potencia de la base, se debe recurrir a un **cambio de base**, utilizando logaritmos con bases convenientes o logaritmos decimales o neperianos, los cuales pueden resolverse con la calculadora científica.

6. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$

$$\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{\log 8}{\log 16} = \frac{\ln 8}{\ln 16}$$

8) Apliquen logaritmos para resolver las siguientes ecuaciones. (Utilicen la calculadora para obtener los logaritmos y aproximen las soluciones redondeando a los milésimos cuando sea necesario)

a) $2^x = 10$

b) $5\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^{-3} = 0$

c) $e^x + 3e^x = 4$

5) Resuelvan las ecuaciones y verifiquen las soluciones que obtengan

a) $log_x\ 27 = 3$

b) $log_{\frac{1}{2}}\ (-x + 5) = 2$

c) $log\ x - log\ 17 = 0$

d) $log_8\ (3 - 2x) = 0$

e) $log_3\ x = 5 \cdot log_3\ 2$

f) $log\ x - log\ 3 = 2$

g) $log_2\ (8 \cdot x) + log_2\ (4 \cdot x^2) = 8$

h) $log_5\ (x + 12) - log_5\ (x + 3) = 1$

i) $log\ (x - 8) + log\ (x - 2) = log\ (-8 - x)$

6) Resolver y luego unir cada ecuación con su solución.

a. $\log_3 (x + 2) = 5$	$x = -3$
b. $\log_2 (x - 1) = 3$	$x = 1$
c. $\log (x + 3) = -2$	$x = 241$
d. $\log_2 (-x - 1) = 1$	$x = 9$
e. $\log x = 3$	$x = 1000$

13)

7) Indiquen verdadero o falso, según corresponda

a. $\log_3 7 + \log_5 9 = \log_8 (7 + 9)$ ☐

b. $\log_3 24^2 = 2 . \log_3 24$ ☐

c. $\ln (3 . 27) = 3 . \ln 27$ ☐

d. $\ln (10 . 11) = \ln 10 + \ln 11$ ☐

e. $\log_8 5^3 = 3 . \frac{\log 5}{\log 8}$ ☐

f. $\log_9 41 = \frac{\log 41}{\log 9}$ ☐

8) Calculen los siguientes logaritmos, sin usar calculadora

a. $\log_4 8 + \log_4 512 =$ ______________________

____

b. $\log_{18} 486 + \log_{18} 12 =$ ______________________

____

c. $\log_{15} 75 + \log_{15} 45 =$ ______________________

____

d. $\log_6 1080 - \log_6 5 =$ ______________________

____

e. $\log 0{,}0002 - \log 2 =$ ______________________

____

f. $\log_2 224 - \log_2 7 =$ ______________________

____

9) Expresen los siguientes logaritmos como un solo logaritmo

a. $\log 3 + 2 . \log 4 - \frac{3}{2} . \log 100 =$

b. $\log \frac{2}{3} - \log \frac{9}{5} + \log 27 =$

c. $2 . \log 3 + \frac{1}{2} . \log 9 - 5 . \log 1 =$

d. $\log 25 + 2 . \log 21 + \log \frac{21}{25} =$

10) Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $\log_2 (x + 3) - \log_2 (x - 5) = 3$

b. $\log_2 x + \log_2 \frac{x}{8} = 1$

c. $\log_3 x^2 + \log_3 x - 3 = 0$

d. $\log_3 (x + 2) + \log_3 (x + 1) = \log_3 (x^2 - 1)$

e. $\log_5 x + \log_5 (2x - 1) - \log_5 (2x + 2) = 0$

f. $\log (x - 1) - \log (x - 3) = \log 2$

Más ejercicios para seguir practicando:

Hallar el valor de "x"

1) $\log_4 64 = X$

2) $\log_{10} 1000 = X$

3) $\log_{10} 0{,}01 = X$

4) $\log_a a^2 = X$

5) $\log_3 81 = X$

6) $\log_2 \frac{1}{4} = X$

7) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = X$

8) $\log_2 \frac{1}{32} = X$

9) $\log_3 \frac{1}{27} = X$

10) $\log_{\frac{1}{32}} 2 = X$

15) $\log_5 \frac{1}{125} = X$

16) $\log_{125} 5 = X$

17) $\log_{16} \frac{1}{2} = X$

18) $\log_X 9 = 2$

19) $\log_X 5 = \frac{1}{2}$

20) $\log_X \left(\frac{1}{25}\right) = -2$

21) $\log_X \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

22) $\log_X \frac{1}{8} = -3$

23) $\log_X 16 = -4$

24) $\log_2 X = 3$

29) $\log_{27} \frac{X}{5} = \frac{1}{3}$

30) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{2X}{3} = -\frac{1}{2}$

31) $\log_4 (x) = 0$

32) $\log_2 (x+1) = 0$

33) $4\log_2 (x-1) = 0$

34) $\log (x-1)^2 = 0$

35) $\log_2 \left(x^2 + 2x - 3\right) = 0$

36) $\log_2 \left(x^2 + 3x - 2\right) = 1$

37) $\log_2 (x+1) = -3$

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

64) $3^x + 1 = 4$

65) $3^{x+1} - 2 = 25$

66) $7^{x+3} - 2 = -1$

67) $3^{2x-1} = 3$

68) $8^{x+1} = 2^{2x+7}$

69) $5 \cdot 2^x + 2^x = 24$

70) $3 \cdot 2^x - 2^x = 1$

71) $8 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+1} = 1$

72) $2^{x+1} + 2^x = 12$

73) $5^{x+3} - 5^{x+2} = 4$

74) $3 \cdot 2^{x^2-1} = 3$

75) $8 \cdot 2^{3x-1} + 2^{3x} = \frac{5}{8}$

76) $4^{x+1} + 4^{x+2} = 1280$

77) $\frac{3}{32} \cdot 4^{x+2} - \frac{1}{8} \cdot 4^{x+1} = 1$

78) $2^x \cdot 2^{x+1} = 8$

79) $\frac{25}{3} \cdot 5^{3x-1} \cdot 5^{3-2x} = 3$

80) $\frac{1}{5} \cdot \frac{3^{4x+2}}{3^{3x+1}} = \frac{1}{45}$

81) $7^x \cdot 7^{1-x} = 5x + 2$